Lycée Ibn Alyassamine	Examen Simili En Mathématique
Délégation Hay Hassani - Casa	Niveau : 2ème Bac Sc Maths A et B
Prof : Abdellah Belkhatir	Durée : 04 heures

➤ **Note :**

Regardez l'ensemble du sujet et repérez les parties que vous connaissez bien, ou au contraire les parties qui vous semblent plus difficiles et débutez par ce que vous savez le mieux faire.

Le barème prendra significativement en compte : la présentation, la lisibilité et le soin porté à l'argumentation des réponses.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Exercice 01:(04pts)

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$(E): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[19].$$

0,5 — 1)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z}); 9x^2 + 15x + 7 \equiv (3x-7)^2 - 4[19]$.

0,5 — 2)- En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \{19k + 3 / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k + 8 / k \in \mathbb{Z}\}.$$

II- Soit $p \geq 2$ un entier naturel premier.

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tels que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 0[p]$.

0,25 — 1)- a)- Vérifier que : $9a^2 + 15a + 7 \equiv 3(a+1)(3a+2) + 1$.

0,5 — b)- Montrer que : $p \geq 5$.

0,25 — 2)- a)- Montrer que : $(3a+2)^3 \equiv 1[p]$.

0,5 — b)- En déduire que : $(3a+2) \wedge p = 1$ (On pourra utiliser le théorème de Bézout).

0,5 — 3)- En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p \equiv 1[3]$.

4)- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F): 9x^2 + 15x + 7 \equiv 0[149]$.

0,5 — a)- Montrer que l'entier naturel 149 est premier.

0,5 — b)- Déterminer en justifiant la réponse l'ensemble des solutions de (F).

○ Exercice 02: (04pts)

I- *On considère dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$(E): 2z^2+\left(3\sqrt{3}-7i\right)z-6\left(1+i\sqrt{3}\right)=0.$$

0,5 **1)- a)-** *Montrer que* (E) *admet une solution imaginaire pure* z_1 *que l'on déterminera.*

0,5 **b)-** *En déduire que l'autre solution de* (E) *est* $z_2=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$. *Puis écrire cette solution sous forme trigonométrique.*

2)- *Dans le plan complexe, on considère les points* A *et* B *d'affixes respectifs :* $a=2i$ *et* $b=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$. *On désigne par* C *le centre du cercle* (Γ) *circonscrit au triangle* OAB *et soit* R *son rayon, on pose :* $c=aff\,(C)$.

0,5 **a)-** *Montrer que :* $c-\bar{c}=2i$ *et* $c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

0,5 **b)-** *En déduire* c *et* R.

II- *Soit* F *la transformation qui a tout point* $M(z)$ *associe le point* $M'(z')$ *tels que :* $z'=(1+2i)z-(4+2i)$.

0,25 **1)- a)-** *Montrer que* F *admet un seul point fixe* Ω *dont on déterminera l'affixe* ω.

0,75 **b)-** *Prouver que :* $F=h\circ r$ *,Où* h *est une homothétie de centre* Ω *et de rapport* $k=\sqrt{5}$ *et* r *une rotation de centre* Ω *et d'angle* $\theta=Arc\tan 2$.

0,25 **2)- a)-** *Montrer que :* $\left(\forall z\in\mathbb{C}-\{\omega\}\right); z'-z=-2i(z-\omega)$.

0,5 **b)-** *En déduire la valeur du rapport* $\frac{MM'}{M\Omega}$ *et une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{M\Omega}\right)$.

0,25 **c)-** *Décrire comment construire le point* $M'(z')$ *sachant la position de* $M(z)$.

○ Exercice 03: (3,5pts)

⇨ *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $f_n(x)=x+n(1+\ln x)$.

0,5 **1)- a)-** *Calculer* $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

0,75 **b)-** *Montrer que* f_n *est une bijection de* $\mathbb{R}^{*+}$ *vers* $\mathbb{R}$.

0,5 **2)- a)-** *Montrer que l'équation* $f_n(x)=0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que* $\frac{1}{e^2}<\alpha_n<\frac{1}{e}$.

0,5 **b)-** *Montrer que :* $\left(\forall x\in\left]0,\frac{1}{e}\right[\right), f_{n+1}(x)<f_n(x)$. *Puis en déduire la monotonie de la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0,75 **c)-** *Déduire que la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente , puis calculer sa limite.*

0,5 **d)-** *Prouver que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\left(\frac{1}{e}-\alpha_n\right)=\frac{1}{e^2}$.

Exercice 04: (8,5pts)

I- *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f(0)=1 \text{ et } f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}\text{ ; si } x>0.$$

0,5 *1)- a)- Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

0,5 *b)- Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});(x+1)e^{-x}-1<0$ *, puis en déduire la monotonie de* f *sur* $\mathbb{R}^+$.

2)- Soit F_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);F_n(x)=\frac{e^{-x}}{n!}.\int_0^x t^n e^t dt \text{ Où } n\in\mathbb{N}^*.$$

0,25 *a)- Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F_1(x)=x-1+e^{-x}$.

0,25 *b)- Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^+);F_{n+1}(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}-F_n(x)$.

0,5 *c)- En déduire que pour tout* $x\in\mathbb{R}^+$, *On a :*

$$F_2(x)=\frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x} \text{ et } F_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}.$$

0,5 *3)- Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\dfrac{-x}{2}\le f(x)-1\le\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x^2}{6}$.

II- *On considère la fonction* F *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$F(0)=1 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \text{ ; si } x>0.$$

0,5 *1)- a)- Montrer que :* $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});1-\dfrac{x}{4}\le F(x)\le 1-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{18}$.

0,5 *b)- En déduire que* F *est continue et dérivable à droite en* 0 *et préciser* $F'_d(0)$.

0,5 *2)- a)- Montrer que :* $(\forall x\in[1;+\infty[);0\le F(x)\le\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}.\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

0,5 *b)- En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$, *puis interpréter géométriquement cette limite.*

0,5 *3)- a)- Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *et que :*

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F'(x)=\frac{f(x)-F(x)}{x}.$$

0,5 *b)- En utilisant le théorème des accroissements finis convenablement, Montrer que* F *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^+$.

0,5 *4)- Construire la courbe* (C_F) *dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

	III- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *On pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}dx$.
0,25	**1)- a)-** *Calculer l'intégrale* I_0.
0,5	**b)-** *Montrer que la suite* $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.*
0,5	**c)-** *Montrer que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); I_n + I_{n+1} = f\left(n\right)$ *,puis en déduire .*
	2)- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, *On pose :* $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k . f\left(k\right)$.
0,5	**a)-** *Montrer que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx} = \frac{(-1)^{n-1}e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)} - \frac{e^{-x}}{1+e^x}$.
0,75	**b)-** *Justifier que :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right); S_n = (-1)^{n-1}.I_n + \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$, *puis en déduire que la suite* $\left(S_n\right)_{n\geq 2}$ *est convergente en précisant sa limite.*

Fin Du Sujet.